La entropía como medida de la «bondad de predicción» en situaciones dinámicas

por MIGUEL A. MARTINEZ-ECHEVARRIA
Departamento Estadística de la Facultad
de Ciencias Económicas. (U. A. de Madrid.)

Artículo publicado en la revista "Estadística Española", del Instituto Nacional de Estadística números 84 y 85, correspondientes a Julio-Diciembre de 1979

MADRID, 1980

Depósito Legal: M. 13097 - 1958

ISSN. 0014 - 1151

I.N.E. ARTES GRAFICAS.- Avda. Generalísimo, 91 – MADRID-16

La entropía como medida de la «bondad de predicción» en situaciones dinámicas

por MIGUEL A. MARTINEZ-ECHEVARRIA

Departamento Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas. (U. A. de Madrid.)

Una de las características más significativas de cualquier método científico es la de tratar de predecir el comportamiento futuro. Pero el futuro, para que pueda recibir con propiedad esa denominación, debe ser caracterizado por su intrínseca incertidumbre. En la situación extrema, y desde el enfoque predictivo, los conceptos de futuro e incertidumbre son intercambiales.

En los llamados métodos deterministas no se puede hablar propiamente de predicción del comportamiento futuro, ya que los sistemas deterministas son «atemporales», en el sentido de que el factor tiempo ha sido excluido, o por mejor decir, permanece pero vaciado de su auténtico significado. En aquellos sistemas en los que siempre se conoce con exactitud lo que «ha ocurrido» o «va a ocurrir», en un instante cualquiera de tiempo, no puede hablarse con propiedad de «futuro» o «pasado», sino de un continuo presente que se actualiza en diversos momentos.

Trataremos de establecer una medida subjetiva de la evolución temporal de un sistema, es decir, que exprese el comportamiento de la incertidumbre respecto de un determinado sistema de referencia temporal. A partir de ello haremos unas consideraciones acerca del concepto de equilibrio probabilístico del sistema, y como una consecuencia de todo ello justificaremos el empleo del incremento de entropía como una medida de la «bondad de predicción» en situaciones de estimación dinámica.

Iniciemos nuestro razonamiento en la consideración de un sistema de estructura dual, que se ajusta a las características expuestas por O. Onicescu (1964). Designaremos los términos de esta dualidad como la macro y la micro estructura.

Trátese, por ejemplo, de un sistema compuesto por un conjunto finito de individuos, y se quiere estudiar las relaciones de consumo entre ellos. Desde un punto de vista individual, cada elemento de este conjunto adopta una conducta de consumo. Estas conductas de consumo pueden expresarse mediante una sucesión de «estados de consumo» en los que puede encontrarse el individuo en cuestión. Estos estados de consumo vienen determinados por los valores de un conjunto de magnitudes económicas, elegidas de la manera más adecuada a los objetivos del observador. Todo este conjunto de estados así representados constituyen lo que daremos en llamar estructura microeconómica del sistema. Para un observador de la totalidad del sistema —para el que no es accesible la investigación exhaustiva— éste se le manifiesta mediante magnitudes que se pueden considerar como «agregaciones», en su más amplia aceptación, de las conductas individuales de consumo. Un determinado conjunto de estas magnitudes «agregativas» precisan un «estado» del sistema en cuanto que totalidad. El conjunto de estos «macroestados» es lo que daremos en llamar la estructura macroeconómica del sistema.

Cada estado microeconómico tendrá un determinado número de «grados de libertad». Entendiendo por «grado de libertad» cada una de las magnitudes económicas independientes que caracterizan una situación individual de consumo. Sea $\mathscr{C}$ el correspondiente espacio de los comportamientos; es decir, el constituido por todos los estados individuales de consumo posibles y admitidos.

Supóngase que desde el punto de vista macroeconómico, el sistema admite n estados, y sean $c_1, c_2, \ldots, c_n$, los conjuntos de estados microeconómicos compatibles, en el sentido de proporcionar adecuada justificación, con cada uno de los admitidos estados macroeconómicos. Por razones de sencillez conceptual, vamos a suponer que los conjuntos c_i, $i = 1, \ldots, n$, son invariables con el tiempo, y autoexcluyentes. En otras palabras, los conjuntos c_i constituyen una partición de $\mathscr{C}$. Es decir, verifican:

$$\mathscr{C} = \bigcup_{i=1}^{n} c_i$$

$$\phi = c_i \cap c_j \; (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

La condición de disyunción asegura que cada conjunto de estados microeconómicos determinan unívocamente el respectivo estado macroeconómico del sistema.

Las relaciones de trueque e intercambio entre los consumidores dan lugar a una incesante dinámica económica del sistema, lo que provoca una continua distorsión

estructural del sistema en ambos términos de su dualidad. Esta actividad puede representarse mediante una incesante aplicación biunívoca $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}$. En este modelo, el transcurso del tiempo se manifiesta, a nivel microeconómico, porque un individudo cuyo estado de consumo era $s_i \in \mathscr{C}$, en un cierto instante de tiempo, se encuentra en un instante posterior en el estado $s_j \in \mathscr{C}$ con $s_i \neq s_j$, para cualquiera que sea el intervalo de tiempo considerado. (Obsérvese que esta restricción implica que el mero transcurso del tiempo modifica la situación de consumo de un individuo, que a nuestro entender es la máxima manifestación de lo intrínseco que es el tiempo en cualquier proceso económico.)

Por efecto de la incesante «reestructuración» del sistema, los puntos que en el instante t pertenecían al conjunto c_j, en otro instante diverso $t \pm \Delta t$, se reparten entre los restantes conjuntos c_i, $j \neq i = 1, 2, \ldots, n$.

Vamos a realizar la suposición adicional de que en cada instante de tiempo están «ocupados» todos los puntos de $\mathscr{C}$. No es admisible que nadie renuncie a una situación de consumo. Cada punto está ocupado en cada momento.

En esta situación, el paso del punto-representativo desde el conjunto c_j al c_i, viene a representar un cambio en la estructura global del sistema, que pasa del estado macroeconómico compatible con el conjunto c_j, al estado macroeconómico compatible con el conjunto c_i. La incertidumbre ligada al hecho de que ese evento se produzca, o no, vendrá expresada mediante una cierta probabilidad, que designaremos:

$$0 \leq p_{\Delta t}(c_j/c_i) \leq 1 \qquad (1)$$

Supongamos que esta «probabilidad de transformación» no depende más que del intervalo temporal Δt. Con lo que queremos poner de manifiesto que la actividad económica tiene una dinámica intrínseca; de tal forma, que el factor tiempo no sólo es manifestación de dicha actividad, sino que en cierto sentido también es causa. El mero transcurrir del tiempo también provoca una modificación en la función de utilidad de cada uno de los consumidores.

Con el establecimiento de las «probabilidades de transformación» no hemos hecho más que formalizar nuestra ignorancia acerca de las verdaderas causas, que regulan los cambios de conducta de consumo de cada uno de los individuos que componen el sistema.

Desde un punto de vista topológico, las leyes económicas que rigen las variaciones de conductas de consumo, no son más que aplicaciones biunívocas de $\mathscr{C} \Leftrightarrow \mathscr{C}$, con continuas redistribuciones de la totalidad de los puntos de entre los diversos conjuntos $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Las probabilidades de transformación verifican las siguientes condiciones de normalización:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{\Delta t}(c_i/c_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{\Delta t}(c_j/c_i) = 1 \qquad (2)$$

Estas relaciones vienen a establecer que de modo necesario un consumidor permanece en su conducta inicial (o casi idéntica), o adquire un tipo de conducta de consumo ya comprendida en el espacio de los comportamientos $\mathscr{C}$.

Si para un cierto instante de tiempo t_0 suponemos que las probabilidades de que los puntos representativos de las conductas de consumo pertenezcan a los respectivos conjuntos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, son conocidas y vienen dadas por:

$$p_{t_0}(c_i) \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad (3)$$

Hemos establecido cuál es nuestra opinión; o mejor dicho, el más razonable modo de expresar nuestra opinión, acerca de cuál sea el verdadero estado macroeconómico del sistema.

Como es lógico, las probabilidades definidas en (3) verifican la condición de normalización dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{t_0}(c_i) = 1$$

En un momento posterior $t_k = t_0 + \Delta t$ las probabilidades de los estados macroeconómicos vendrán dadas por:

$$p_t(c_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{t_0}(c_j) \cdot p_{tk}(c_i, c_j) \quad i, j = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Esta expresión pone de manifiesto que una ampliación del horizonte temporal implica un necesario incremento de la incertidumbre. En otras palabras, $\{p_{t_0}(c_i)\}$ para $i = 1, \ldots, n$, representa nuestro conocimiento, o mejor dicho, la expresión más racional de nuestro conocimiento acerca de la estructura del sistema en el instante t_0. En un instante posterior $t_k (k > 0)$, el sistema puede, o no, tener la misma estructura microeconómica, pero en cualquier caso el mero discurrir temporal introduce por sí mismo una incertidumbre, o un incremento de incertidumbre, que dará lugar a una nueva formulación $\{p_{tk}(c_i)\}$ con $i = 1, \ldots, n$, de nuestro conocimiento acerca de la «verdadera estructura» del sistema.

Hemos escrito la expresión verdadera estructura, en forma entrecomillada para poner de manifiesto que se emplea de modo impropio, ya que no disponemos de un

método que evidencie la existencia de una estructura inmutable y única que exprese la situación objetiva de la estructura en cada instante de tiempo.

En cada instante, la estructura microeconómica del sistema se manifiesta mediante magnitudes macroeconómicas observables, que tienen el carácter genérico de medidas de comportamiento agregativo, o en otra expresión que desempeñan función de promedios.

La capacidad de generar información macroeconómica que tiene la íntima estructura microeconómica puede expresarse de modo genérico mediante la llamada —en el sentido de Shannon (1949)— entropía de los estados macroeconómicos $\{c_i, i = 1, \ldots, n\}$, en cuanto que expresión de la supuesta estructura microeconómica.

Así, para un instante cualquiera t_k, la entropía H_{tk} de los estados macroeconómicos $c_1, c_2, \ldots, c_n$, vendrá expresada por:

$$H_{tk} = -\sum_{i=1}^{n} p_{tk}(c_i) \cdot \log p_{tk}(c\,) \qquad (5)$$

Estudiemos cómo se comporta esta magnitud en una sucesión temporal tal como la siguiente:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < t_{k+1} < \ldots$$

Para ello, hagamos previamente las siguientes consideraciones.

Sea I un intervalo cualquiera sobre la recta real. Y sea g una función que toma valores reales en I, tal que para cada valor $\alpha \in (0, 1)$, y para cada par (x_1, x_2) de elementos de I, se verifica que:

$$g[\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2] \leq \alpha g(x_1) + (1 - \alpha) g(x_2) \qquad (6)$$

Entonces se dice que g es una función convexa, o estrictamente convexa si la desigualdad se verifica en su sentido estricto (<).

Admitamos entonces que disponemos de una función convexa g sobre el intervalo real I, y sea X una variable aleatoria con esperanza finita, y tal que $p(X \in I) = 1$, entonces se verifica que:

$$E[g(X)] \geq g[E(X)] \qquad (7)$$

Expresión que recibe el nombre de desigualdad de Jensens, cuya demostración puede verse en el anexo I.

Si tomamos $g(X) = -\log E(X)$, tendremos:

$$E[\log X] \leq \log E(X) \tag{8}$$

Admitiendo ahora que X es una variable discreta que toma los valores $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, pertenecientes al intervalo I, con las probabilidades respectivas $p(X = x_i) = p_i$ con $i = 1, \ldots, m$. Podremos escribir:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \log x_i \leq \log \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \tag{9}$$

o lo que es lo mismo:

$$\log \prod_{i=1}^{m} (x_i)^{p^i} \leq \log \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \tag{10}$$

o bien:

$$\prod_{i=1}^{m} (x\ )^{p^i} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i x_i \tag{11}$$

Si en la desigualdad (9) hacemos:

$$x_1 = q_1/p_1,\ x_2 = q_2/p_2,\ \ldots,\ x_m = q\ \ /p_m$$

donde $p_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, verificándose $\sum_{k=1}^{m} p_m = 1$, obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \log (q_i/p_i) \leq \log \sum_{i=1}^{m} p_i (q_i/p_i) \tag{12}$$

operando queda:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i (\log q_i \leq \log p_i) \leq 0 \tag{13}$$

de donde se sigue:

$$-\sum_{i=1}^{m} p_i \log p_i \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \log q_i \tag{14}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4), (11) y (14) podemos establecer cuál es la situación entrópica de los estados macroeconómicos en un instante cualquiera t_{k+1} posterior al instante t_k. Para ello procedamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_{t_{k+1}} &= \sum_{i=1}^{n} p_{tk+1}(c_i) \cdot \log p_{tk+1}(c_i) = \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} p_{tk+1}(c_j) p_{tktk+1}(c_i/c_j) \cdot \log p_{tk+1}(c_i) = \\ &= -\sum_{j=1}^{n} p_{tk}(c_j) \cdot \log \left\{ \mathop{}\limits_{i=1}^{n} [p_{tk+1}(c_i)]^{ptktk+1(ci/cj)} \right\} \\ &\geq -\sum_{j=1}^{n} p_{tk}(c_j) \cdot \log \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_{tktk+1}(c_i/c_j) \cdot p_{tk+1}(c_i) \right\} \\ &\geq -\sum_{j=1}^{n} p_{tk}(c_j) \cdot \log p_{tk}(c_j) = H_{tk} \end{aligned} \tag{15}$$

Esta desigualdad permite establecer la siguiente cadena de desigualdades:

$$H_{t_0} \leq H_{t_1} \leq \ldots \leq H_{tk} \leq H_{tk+1} \leq \ldots \leq \log n \tag{16}$$

Es decir, la entropía ligada a los estados macroeconómicos evoluciona en un único sentido, y existe un límite que viene dado por:

$$\lim_{k \to \infty} H_{tk} = H_\infty \leq \log n \tag{17}$$

Esta situación límite que corresponde a la equiprobabilidad de todos los conjuntos $\{c_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, suele ser interpretada por algunos autores como situación de equilibrio del sistema.

Algunos autores como S. Guiasús (1965), para el ámbito de los sistemas dinámicos, y N. Georgesco-Roegen, para el ámbito económico, han hablado de la existencia de una tendencia natural en los sistemas hacia esa situación de equilibrio.

En el presente trabajo, apartándonos de la línea de pensamiento de los dos autores citados, afirmamos que la expresión (17) nos permite establecer una medida subjetiva de la evolución temporal del sistema, pero pensamos que se puede prestar a confusión el hablar indiscriminadamente de situaciones de equilibrio.

La expresión (17) nos permite decir que la máxima entropía se produce cuando se alcanza una situación —subjetiva— de radical indiferencia respecto de cual sea la «verdadera» microestructura económica del sistema. Dicho en otras palabras, la evolución temporal del sistema conduce, desde el punto de vista del estado de conocimiento del observador, a aquel estado caracterizado por la asignación de una equiprobabilidad entre todas las posibles configuraciones microeconómicas.

Esta radical indiferencia no implica necesariamente la existencia de un «equilibrio económico real», si es que existe. No nos detendremos a hacer consideraciones sobre la naturaleza real de este tipo de equilibrio, sino que siguiendo el pensamiento de Hansen (1970), no limitaremos a decir que la maximación de la expresión (17) no implica la existencia de una situación en la que cada consumidor tenga satisfechas las «necesidades materiales objetivadas», de modo que su conducta de consumo se limite a desplazamientos en las curvas de indiferencia elegidas. Nuestra opinión es que el «equilibrio» expresado en (17) no es más que un equilibrio probabilístico, es decir, una expresión en términos de probabilidad de la ignorancia «a priori», por parte del observador, acerca de cuál sea la verdadera configuración microeconómica del sistema.

Dicha situación sólo se plantea en una óptica de futuro, es decir, desde un instante previo t_0, que representa la situación real y observable actual, y que tomamos como punto de referencia temporal, podemos expresar la «acumulación sucesiva» de la incertidumbre, que viene a manifestar nuestra incapacidad de seguir en detalle, y una a una, las modificaciones de los «estados de consumo» de cada uno de los individuos que integran el sistema.

No deja de ser significativo que la evolución futura de un sistema económico, puede ser considerado como análogo al de una cadena de sistemas de trasmisión de información, mediante un mismo conjunto de «señales» $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, y con una perturbación dada, para cada intervalo de tiempo, doblemente estocástica.

Hay que destacar que el crecimiento de esta entropía está generada por la propia estructura dual del sistema. G. N. Lewis ya afirmaba en 1930 que «la entropía de un sistema constituye un índice del grado de ignorancia acerca de la microestructura del sistema». El crecimiento de entropía se produce cuando se pasa de una distribución conocida a otra desconocida. Lo que caracteriza la «irreversibilidad» de un proceso no es la dificultad física de invertirlo, sino la pérdida de información que supone cualquier evolución temporal de información que supone cualquier evolución temporal de un sistema.

El haber establecido en (17) la radical «irreversibilidad» de la evolución futura de un sistema económico nos ha sugerido que la entropía puede constituir una excelente manera de medir la «bondad de una predicción» en un sistema económico dinámico.

Supongamos que en un cierto instante t los estados microeconómicos se distribuyen de acuerdo con una función de densidad o de cuantía f_t, y que la forma de esta función se mantiene inalterable a lo largo del tiempo de observación. Lo cual quiere decir que pueden variar los parámetros característicos de la distribución, pero no la forma de la distribución.

Con los datos macroeconómicos de que se dispone en el instante t, se pretende realizar una predicción de la distribución en el instante $t + \Delta t$. Es decir, una predicción de los valores de los parámetros característicos en ese intervalo. La diferencia entre la «entropía estimada» en $t + \Delta t$ y la entropía «real» en ese mismo instante nos proporciona una medida de la «bondad de la predicción realizada».

Supongamos que en el instante t se dispone del conjunto de datos x, representativos, en sentido agregativo, de la microestructura económica del sistema. Si el sistema está en equilibrio es perfectamente admisible suponer que las variables macroeconómicas se distribuyen de igual forma para cualquiera que sea el intervalo considerado. Si llamamos y a las observaciones futuras, las que correspondenrían al instante $t + \Delta t$, nos interesa conocer la forma de la distribución $f(y/x)$. Es decir, la distribución de y en función de los datos x, actualmente observados.

Designemos por $f(y)$ la verdadera distribución que genera los futuros datos y.

De acuerdo con la medida de la incertidumbre de Kullback-Leiber (1951), la entropía de $f(y)$, con respecto a su estimación $f(x/y)$ viene expresada por:

$$H[f(y), f(y/x)] = -\int f(y)/f(y/x) \log [f(y)/f(y/x)]\, f(y/x)\, dy \tag{18}$$

que puede escribirse como:

$$H[f(y) \cdot f(y/x)] = -\int f(y) \cdot \log f(y/x) \cdot dy - \int f(y) \cdot \log f(y)\, dy \tag{19}$$

Obsérvese que la medida de Kullback-Leiber se expresa como una diferencia de entropías de Shannon, donde las «señales» han sido alteradas por una «perturbación»: la relación bayesiana entre $f(y/x)$ e $f(y)$.

La primera de las integrales de la expresión (19) determina la bondad de $f(y/x)$ en cuanto que estimación de $f(y)$. La designaremos:

$$E_y[\log f(y/x)] = \int f(y) \log f(y/x) \cdot dy \tag{20}$$

La bondad del procedimiento de estimación, basado en el empleo de $f(y/x)$, vendrá, en consecuencia, medida por la expresión:

$$E_x\{E_y[\log f(y/x)]\} = \int E_y[\log f(y/x)] f(x) \cdot dx \qquad (21)$$

que es precisamente la expresión de la log-verosimilitud esperada de $f(y/x)$ con respecto a la observación futura y.

$$E_x\{E_y[\log f(y/x)]\}$$

Luego la expresión (21) constituye una medida de la bondad de la predicción a partir de los datos x en el instante t. Esa medida es teóricamente perfecta, pero adolece del grave inconveniente de que no es calculable «a priori». Pero esta dificultad es salvable mediante el recurso a $f(x)$ como estimación de $f(y)$ o, mejor dicho, de:

$$E_x\{E_y[\log f(y/x)]\}$$

Cuando la distribución queda especificada para un vector paramétrico fijo θ, tenemos que en ese caso $\log f(x, \theta)$ coincide exactamente con al definición clásica de la log-verosimilitud de la estructura microeconómica especificada por $f(x, \theta)$, y se verifica que:

$$E_x[\log f(x, \theta)] = E_x\{E_y[\log f(y/x)]\} \qquad (22)$$

Pero para una $f(x)$ más genérica, suele suceder que:

$$E_x[\log f(x)] \neq E_x\{E_y[\log f(y/x)]\} \qquad (23)$$

por esta razón, trataremos de asignar una log-verosimilitud de la estructura caracterizada por $f(x)$, tal que sea:

$$[f(x/x)] = \log f(x) + C \qquad (24)$$

siendo C una constante determinada por la condición:

$$E_x\{\ [f(x)]\} = E_x\{E_y[\log f(y/x)]\} \qquad (25)$$

Es evidente que esta definición solamente tiene sentido cuando nos restringimos a la familia $\{f(y)\}$ caracterizadas por incluir a C como una constante de todos sus miembros.

Aunque la definición de verosimilitud de la estructura que acabamos de hacer, puede ser aplicada a cualquier $f(y/x)$, incluida la distribución previsible en el instante $t + \Delta t$,

y obtenible mediante un procedimiento Bayes, nos centraremos especialmente en aquel caso en el que la distribución previsible $f(y/x)$ viene dada en la forma:

$$f(y/x) = f(y, \theta)^*; \text{ siendo } \theta^* = \theta(x) \qquad (26)$$

θ^* es la estimación máxima verosímil de θ definida por:

$$f(x, \theta^*) = \max_\theta f(x, \theta) \qquad (27)$$

Cuando la verdadera distribución en el instante $t + \Delta t$ viene expresada en la forma $f(y, \theta_0)$, tenemos que, bajo ciertas condiciones de regularidad (véase H. Akaike, 1978) se verifican las siguientes igualdades asintóticas:

$$2\log f(x, \theta^*) - 2\log f(x, \theta_0) \sim \chi_k^2 \qquad (28)$$

$$E[2\log f(y, \theta_0) - 2\log f(y, \theta^*)] \sim \chi_k^2 \qquad (29)$$

siendo k el número de dimensiones del vector.

Las dos variables definidas por los primeros términos de las expresiones (28) y (29) tienden, asintóticamente, a ser iguales numéricamente. En ese caso, admitiendo la existencia de esas esperanzas, se pueden establecer las siguientes igualdades asintóticas:

$$2\{E_x[\log f(x, \theta^*)] - E_x[\log f(x, \theta_0)]\} = k \qquad (30)$$

$$2\{E_y[\log f(y, \theta_0)] - E_x[E_y[\log f(y, \theta_0]]\} = k \qquad (31)$$

Sumando estas dos igualdades y teniendo en cuenta la relación:

$$E_y[\log f(y, \theta_0)] = E_x[\log f(x, \theta_0)] \qquad (32)$$

obtenemos:

$$-E_x\{E_y[\log f(y, \theta^*)]\} = -E_x[\log f(x, \theta^*)] + k \qquad (33)$$

Esta expresión viene a establecer que en condiciones asintóticas:

$$\mathscr{L}[f(y/\theta^*)] = \log f(x, \theta^*) - k \qquad (34)$$

para cualquier conjunto de datos, y observados en cualquier intervalo de tiempo $t + \Delta t$, puede ser tomada como la verosimilitud ligada a la estructura dual, en su evolución temporal.

Luego la dificultad anteriormente expresada, puede ser subsanada mediante el empleo de (34) como verosimilitud del modelo, en situación asintótica.

Hemos llegado a la determinación de la verosimilitud de un sistema de estructura dual, que evoluciona temporalmente, a partir del hecho de que la log-verosimilitud esperada, $E_y[\log f(y, \theta)]$, o si se quiere, la entropía de la verdadera distribución $f(y)$, en el instante $t + \Delta t$, con respecto a la distribución estimada, para el instante $t + \Delta t$, a partir de los datos disponibles en el instante actual t, y que hemos expresado $f(y, \theta)$, es la magnitud básica que nos permite medir la bondad de $f(y, \theta)$ en cuanto que predicción de $f(y)$. La razonabilidad de esta definición de verosimilitud se determinará en función de su utilidad y eficacia en los métodos bayesianos de estimación.

APENDICE I

Haremos la demostración para dos supuestos:

Caso A:

Supóngase que E(X) es un punto extremo. Entonces $P[X = E(X)] = 1$, y en consecuencia, $E[g(X)] = g[E(X)]$.

En efecto, supóngase que I = [a,], o bien I = [a,] y que $E(X) = a$. Entonces:

$$p[X - a > \varepsilon] \leq \frac{E(X) - a}{\varepsilon} = 0, \text{ para } \varepsilon > 0$$

luego $E[g(X)] = g(a)$, pero como $g[E(X)] = g(a)$, la demostración queda completa.

Caso B:

Supóngase que E(X) es un punto interior de I. Entonces existe un número real m, tal que:

$$g(X) \geq g[E(X)] + m[X - E(X)] \qquad X \in I$$

Puesto que $g(X) \geq g[E(X)] + m_i[X - E(X)]$ con probabilidad uno, tendremos:

$$E[g(X)] \geq E\{g[E(X)] + m[X - E(X)]\} =$$
$$g[E(X)] + m[E(X) - E(X)] = g[E(X)]$$

Si $p[X \neq E(X)] > 0$, y g es estrictamente convexa, entonces:

$$g(X) > g[E(X)] + m[X - E(X)]$$

con probabilidad positiva. Luego:

$$E[g(X)] > g[E(X)] \qquad \text{c.q.d.}$$

RESUMEN

En los sistemas de estructura dual es posible establecer un teorema acerca del comportamiento de la entropía ligada a cada situación dinámica. La «irreversibilidad» de este comportamiento permite establecer una medida de la bondad de predicción, que resultará estar ligada con la verosimilitud del sistema.

Palabras claves: entropía, predicción, verosimilitud.

AMS 1970. Subject classification. Primary 60 J. 25.

REFERENCIAS

AKAIKE, H.: *On newer approach to parameter estimation and structure determinatio.* 7th IFAC World Congress. Helsinki (1978).

GEORGESCU-ROEGEN, N.: *The entropy law and the economic process.* Harvar Univ. Press (1971).

GUIASU, S.: *Sur le Theoreme H.* París, t. 216. C. R. Acad. Scien (1965).

KULLBACK, S.: *Information Theory an Statistics.* New York. Wiley (1959).

LEWIS, G. N.: *Symetry of time. London. C. U. P. (1070).*

ONICESCU, O.: *Nombres et systemes aletoires.* París. Dunod (1964).

SHANNON, C. E.: *The mathematical theory of comunications.* Illinois. I. U. P. (1949).

La entropia como medida de la "bondad de predicción" en situaciones dinámicas.

En los sistemas de estructura dual es posible establecer un teorema a cerca del comportamiento de la entropia ligada a cada situación dinámica. La "irreversibilidad" de este comportamiento permite establecer una medida de la bondad de predicción, que resultará estar ligada con la verosimilitud del sistema.

palabras clave: entropia, predicción, verosimilitud.

Influencia del efecto sustitución en el sesgo del indice de precios de laspeyres

La "ratio" entre las rentas de que dispone un consumidor en dos periodos de tiempo distintos, y que le proporcionan la misma satisfación, sirve para evaluar el sesgo del indice de precios de Laspeyres. Un análisis somero permite atribuir el sesgo al efecto sustitución de Slutsky

palabras clave: indices de precios. ecuación de Slutsky. efecto sustitución.