Depósito Legal: M. 13097 - 1958
ISSN. 0014 - 1151

I.N.E. ARTES GRAFICAS.- Avda. Generalísimo, 91 – MADRID-16

Influencia del «efecto sustitución» en el sesgo del índice de precios de Laspeyres

por MIGUEL A. MARTINEZ-ECHEVARRIA

Artículo publicado en la revista "Estadística Española", del Instituto Nacional de Estadística números 82 y 83, correspondientes a Enero-Junio de 1.979

MADRID, 1979

Influencia del «efecto sustitución» en el sesgo del índice de precios de Laspeyres

por MIGUEL A. MARTINEZ-ECHEVARRIA
Dpto. Estadística. Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Autónoma de Madrid

El índice de precios al consumo o índice del coste de la vida, que en la mayoría de los países elaboran los respectivos Institutos Nacionales de Estadística u organismo similar, son medidas estadísticas que se limitan a describir las variaciones habidas en los precios al consumo. Estas medidas pertenecen a la clase de los índices compuestos ponderados, es decir, a los constituidos por promedios de un cierto número de «ratios» de precios, entre la situación contemplada y la situación que se toma como referencia. Estos promedios se restringen a los precios de aquellos productos pertenecientes a la llamada «cesta de la compra», designación que engloba la estructura media de consumo de la economía doméstica media, de la población que se está observando.

La importancia que cada uno de los bienes que integran la «cesta de la compra» tiene dentro de la estructura de consumo doméstico, viene expresada mediante una adecuada ponderación.

El problema de la elaboración de un buen índice de precios radica, de manera muy decisiva, en el modo de ponderar los respectivos «ratios» de precios.

La mayoría de los índices oficiales del coste de la vida son índices ponderados de precios del tipo de Laspeyres. Este tipo se caracteriza por utilizar como ponderaciones las cantidades de bienes correspondientes a la estructura promedio de consumo doméstico de la situación de precios que se toma como base de referencia.

Consideremos dos situaciones cualesquiera de precios, que designaremos por 0 y t.

En tal caso, el índice de precios de Laspeyres, que mide la variación de precios tomando como referencia la situación 0, viene dada por:

$$L_0^t = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i^t x_i^0}{\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0} \qquad [1]$$

Donde n es el número de bienes que constituyen la «cesta de la compra».

Las ponderaciones de Laspeyres podría decirse que «congelan» la estructura del consumo familiar en el período de referencia. Esta congelación provoca una tasa de inflación inherente al mismo índice de Laspeyres. El tratar de explicitar este rasgo del índice de Laspeyres es lo que constituye el núcleo central del presente trabajo.

Los índices estadísticos de precios tienen una base puramente empírica; se limitan a recoger resultados y a compararlos, pero introducen un criterio subjetivo al establecer unas ponderaciones o «valoraciones», que en la mayoría de los casos suele hacerse en función del costo económico de las observaciones que habría que realizar para establecer las ponderaciones que se juzgasen como más racionales. Así, aunque la mayoría de los estadísticos están de acuerdo en la superioridad del índice de precios de Paasche como medida del coste de la vida, también están de acuerdo en lo prohibitivo que resultaría su eficiente operatividad.

Para tratar de realizar unas ponderaciones ms objetivas, partamos de la consideración de la función de utilidad de un consumidor:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad [2]$$

siendo n el «tamaño» de la «cesta de la compra».

La magnitud u representa una medida de la satisfacción experimentada por el consumidor al disponer de una cierta «composición» $(x_1, \ldots, x_n)$ de bienes de consumo.

Tratemos de maximizar [2], sujeta a la condición restrictiva:

$$y = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad [3]$$

Siendo y la renta del consumidor, que supondremos fija, y $(p_0, \ldots, p_n)$ el «vector de

precios», que supondremos perfectamente conocido e independiente de la conducta del consumidor. Para ello, hacemos:

$$\mathscr{L} = u - \lambda\left(\sum_{i}^{n} p_i x_i - y\right) \qquad [4]$$

Derivando esta expresión con respecto a las x_i y a λ, obtenemos un conjunto de $n + 1$ ecuaciones que nos proporcionan las funciones de demanda, que son expresión de la conducta del consumidor en el mercado.

Como forma explícita de [2], utilizaremos la llamada función de utilidad de *Stone-Geary,* que se expresa como:

$$u = \sum_{i}^{n} b_i \log(x_i - s_i) \qquad [5]$$

donde s_i son constantes para cada consumidor, y las b_i son tales que $b_i \neq 1$, con $\sum_{i}^{n} = 1$. Más abajo justificaremos el empleo de esta función de utilidad.

La expresión de [4] para este caso será:

$$L = \sum_{i}^{n} b_i \log(x_i - s_i) - \lambda\left(\sum_{i}^{n} p_i x_i - y\right) \qquad [6]$$

Derivando con respecto a las x_i y a λ obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b_i}{(x_i - s_i)} - \lambda p_i = 0 \quad i = 1, \ldots, n \\ &-\sum_{i}^{n} p_i x_i + y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

De donde fácilmente se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{y - \sum_{i}^{n} p_i s_i} \\ b_i &= \frac{p_i(x_i - s_i)}{y - \sum_{i}^{n} p_i s_i} \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

Esta última expresión puede escribirse como:

$$x_i = s_i + \frac{b_i}{p_i}\left(y - \sum_j^n p_j s_j\right) \qquad [9]$$

que es la expresión de la famosa estructura «lineal de gasto», que nos pone cada cantidad demandada de un cierto bien, en función de la renta y de todos los precios de los demás bienes considerados (incluido el propio precio).

Esta ecuación lineal de gasto fue introducida por Klein y Rubin (1947-48) en un intento de aplicar métodos de regresión lineal a las ecuaciones de demanda.

Samuelson (1947-48) sugirió una interesante interpretación de [9]. Las cantidades s_i representan los «mínimos de supervivencia» que cada consumidor está dispuesto a consumir de ese bien. b_i son las proporciones de cada bien para una cierta estructura de gasto.

Con esta interpretación podemos escribir:

$$p_i x_i = p_i s_i + b_i\left(y - \sum_j^n p_j s_j\right) \qquad [10]$$

Es decir, el gasto en un cierto bien se descompone en dos partes: $p_i x_i$ que es el gasto mínimo que el consumidor está dispuesto a realizar en ese bien para mantener su «nivel de subsistencia», y $b_i\left(y - \sum_j^n p_j s_j\right)$, que es la «renta supernumeraria» que el consumidor distribuye entre diversos bienes, con las proporciones $b_1, \ldots, b_n$.

La posibilidad de obtener a partir de [5] la expresión [9], es lo que hace que hayamos recurrido a la función de utilidad de Stone-Geary.

Sustituyendo las soluciones de [7] en [5], obtenemos una descripción alternativa del orden dado de preferencias del consumidor, llamada la función indirecta de utilidad —tipo Stone & Geary—, que expresamos:

$$\left(\sum_i^n b_i\right)\log\left(y - \sum_i^n p_i s_i\right) - \sum_i^n b_i \log p_i + \mathrm{H} \qquad [11]$$

siendo H una constante que depende de la estructura de preferencias del consumidor (del vector $b_1, \ldots, b_n$).

La función de utilidad indirecta [11] representa la más alta utilidad que puede alcanzarse a partir de los precios y rentas, que constriñen la conducta del consumidor. Sus variables son la renta y los precios de los bienes considerados. Cada función de utilidad indirecta define una hipersuperficie en el espacio $n + 1$ dimensional «renta-precios».

Supóngase que para la situación de referencia que hemos designado por 0 se puede establecer un nivel de utilidad —que será el de referencia u_0— sin más que sustituir en [11] $(y, p_i, i = 1, \ldots, n)$ por $(y^0, p_i^0, i = 1, \ldots, n)$. Es decir, por las condiciones que determinan la situación 0 de referencia. Tendremos:

$$u^0 = \left(\sum_i^n b_i\right)\log\left(y^0 - \sum_i^n p_i^0 s_i\right) - \sum_i^n b_i \log p_i^0 + \mathrm{H} \qquad [12]$$

Supóngase que en una situación posterior, que habíamos designado t, conocemos el nuevo vector de precios $(p_1^t, \ldots, p_n^t)$ y queremos conocer cuál sería el nuevo nivel de renta, o «renta equivalente» y_t, que permitiría al consumidor no decaer en su nivel de utilidad. No hace falta conocer con exactitud ese nivel de renta, sino que nos basta con la determinación que acabamos de realizar.

La razón entre la renta de referencia y^0, y la renta equivalente y_t, nos expresa una medida de la variación del coste de la vida, que se diferencia de los índices estadísticos empíricos en que además de tener en cuenta la variación fáctica de los precios, tiene en cuenta la utilidad del consumidor y apropiada ordenación de sus preferencias.

Para expresar esta variación de renta en términos de precios y estructuras de preferencias, tendremos que igualar la magnitud:

$$u^t = \left(\sum_i^n b_i\right)\log\left(y^t - \sum_j^n p_j^t s_j\right) - \sum_i^n b_i \log p_j^t + \mathrm{H} \qquad [13]$$

que representa la utilidad del consumidor, en la situación t, con la expresión [12], que representa la misma utilidad en el período de referencia. Así tendremos:

$$\log\left(y^t - \sum_j^n p_j^t s_j\right) - \sum_i^n b_i \cdot \log p_j^t = \log\left(y^0 - \sum_j^n p^0 s_j\right) - \sum_i^n b_i \cdot \log p^0$$

luego:

$$\log\left(\frac{y_t - \sum_j^n p_j^t s_j}{y^0 - \sum_j^n p_j^0 s_j}\right) = \sum_j^n b_j \log \frac{p_j}{p_i^0} \; b_j$$

o bien:

$$\frac{y^t - \sum_j^n p_j^t s_j}{y^0 - \sum_j^n p^0 s_j} = \sum_j^n \frac{p_j^t}{p_j^0} b_j$$

De donde:

$$y^t = \sum_j^n p_j^t s_j + y^0 - \sum_j^n p_j^0 s_j \sum_j^n (p_j^t / p_j^0) b_j \qquad [14]$$

La medida de la variación de renta, que permite un mismo nivel de satisfacción del consumidor, a pesar de la variación de los «vectores de precios», vendrá dada por:

$$y^t / y^0 = \frac{\sum_j^n p_j^t s_j}{y^0} + \left(\frac{y^0 - \sum_j^n p_j^0 s_j}{y^0} \right) \sum_j^n (p^t / p_j^0) b_j \qquad [15]$$

Esta «ratio», contemplada desde otro planteamiento es lo que Pollak (1971) considera como el núcleo de lo que designa como «el verdadero índice del coste de la vida», en prolongación de un concepto parecido y que fue planteado por primera vez por Klein y Rubin.

Suponiendo que las cantidades consumidas vienen determinadas por el sistema lineal de gasto; poniendo $(y^0, p^0, i = 1, ..., n)$ en [9], y sustituyendo en [1], queda:

$$L_0^t = \frac{\sum_i^n p_j^t \left[s_i + (b_i / p_j^0) \left(y^0 - \sum_j^n p_j^0 s_j \right) \right]}{\sum_i^n p_j^0 \left[s_i + (b_i / p_j^0) \left(y^0 - \sum_j^n p_j^0 s_j \right) \right]}$$

que puede escribirse como:

$$L_0^t = \frac{\sum_i^n p_i^t s_i}{y^0} + \left(1 - \frac{\sum_i^n p_i^0 s_i}{y^0} \right) \sum_i^n \frac{p_i^t b_i}{p_i^0} \qquad [16]$$

La expresión [15] puede ser reescrita como:

$$\frac{y^t}{y^0} = \frac{\sum_i^n p_i^t s_i}{y^0} + \left(1 - \frac{\sum_i^n p_i^0 s_i}{y^0} \right) \sum_i^n \left(\frac{p_i^t}{\mathbf{p}_i^0} b_j \right) \qquad [17]$$

Observando estas dos últimas expresiones se comprueba que la diferencia básica que existe entre ellas es que el índice de Laspeyres emplea una media aritmética, mientras que la «ratio» de rentas emplea una media geométrica. De acuerdo con la fórmula general de Foster, para los promedios, siempre que los precios no varíen en la misma proporción, se verificará que el índice de precios de Laspeyres es superior a la medida de satisfacción representada por la «ratio» de rentas.

Por otra lado, con la renta equivalente y^t, y el vector de precios $(p_i^t;\ i = 1, ..., n)$, que determinan la situación t, podemos escribir:

$$y^t = \sum_i^n p_i^t \cdot x_i^t \qquad [18]$$

Donde las x_i, $i = 1, ..., n$, son las cantidades óptimas que permiten al consumidor mantener el nivel de satisfación que tenía en la situación 0.

Sustituyamos las cantidades x_i^t, obtenidas a partir de [18], en [17] y tendremos:

$$\frac{y^t}{y^0} = \frac{\sum_i^n p_i^t x_i^t}{\sum_i^n p_i^0 x_i^0} \qquad [19]$$

La única diferencia de esta expresión con el índice de Laspeyres [1] es la presencia en el numerador de las cantidades x_i^t, empleadas como ponderaciones, en lugar de las cantidades x_i^0. (Advertimos que aunque se usa una notación parecida a la de Paasche, no hay motivo de confusión).

Supongamos que el consumidor tuviese en la situación t una renta tal como $(y^0 \cdot L_0^t) =$ = Y, renta equivalente determinada por el índice de Laspeyres, de tal manera que tal renta le permitirá consumir las mismas cantidades que en la situación de referencia 0. Sin embargo, la expresión [19] nos permite afirmar que no hay motivos para mantener la estructura de consumo de la situación 0. Por otro lado, la ecuación de Slutsky establece que un cambio en los precios relativos provoca un cambio en la estructura del consumo, debido a un efecto renta y a un efecto sustitución. La renta Y, tal como antes lo establecimos, compensa en parte el efecto renta, pero no el efecto sustitución. Esto último provoca un aumento de utilidad, pues es cierto que podía haber seguido consumiendo las cantidades x^0, sin embargo la posibilidad de alteración, manteniendo el mismo nivel de satisfacción, ya implica aumento inducido de utilidad. Con la renta Y puede obtener una utilidad que es mayor que la asociada con x_i^0, o con y^t.

De acuerdo con la función indirecta de utilidad, a un incremento de utilidad asociado a un régimen de precios dado implica una mayor renta. Luego para el régimen de precios dado por (p_i^t; $i = 1, ..., n$), se verificará que $Y > y^t$, o lo que es lo mismo $L > y^t/y^0$.

Queda, pues, de manifiesto que el efecto sustitución, establecido por Slutsky, es el que provoca un sesgo positivo (sobrevaloración) en el índice del coste de la vida de Laspeyres.

Estudios empíricos como los de Hoa (1969) han puesto de manifiesto que las discrepancias entre el índice real y el de Laspeyres son casi despreciables, en situaciones de casi estabilidad de precios y siempre que se mantenga inalterable la ordenación de preferencias de los consumidores. En cualquier caso siempre es factible el empleo de L_0^t como índice de «seguridad», ya que puede ser interpretado como un límite superior del índice «real» del coste de la vida.

RESUMEN

Influencia del efecto sustitución en el sesgo del índice de precios de Laspeyres.

La «ratio» entre las rentas de que dispone un consumidor en dos períodos de tiempo distintos, y que le proporcionan la misma satisfacción, sirve para evaluar el sesgo del índice de precios de Laspeyres. Un análisis somero permite atribuir el sesgo al efecto sustitución del Slutsky.

Palabras claves: Indices de precios, ecuación de Slutsky y efecto sustitución.

SUMMARY

Influence of the substitution effect on bias of price index of Laspeyres.

The «ratio» between the income of which a comsumer disposes in two different periods of time, and which givé him the same satisfaction, serves to evaluate the bias of price index of Laspeyres. A summary analysis allows one to attribute the bias to the substitution effect of Slutsky.

Key words: Price indices, equation of Slutsky and substitution effect.

AMS 1970. Subject classification 62P20.

REFERENCIAS

FISHER, I. (1923): «The making of index number Hougthon Mifflin». Boston.

GEARY, R. C. (1950): «A constant utility index of the cost of living». Rew. of Ecom & Statis. 18/65-66.

HOA, T. V. (1969): «Consumer Demand and welfare index: a comparative study for the U. K. and Australia». Economica, 409-425.

KLEIN, L. R. and RUBIN, H. (1948): «A constant-utility index of the cost of living». Rev. of Econ. Stud. 15/84-87.

POLLAK, R. A. (1971): «The Theory of the cost of living index». U.S. Bureau of Labour Statistics.

STONE, J. R. N. (1954): «Linear expenditure systems and demand analysis: and application to the pattern of Brithis Damand Economic Journal-68».