

Aleatoriedad y observación

Miguel Alfonso MARTÍNEZ-ECHEVARRÍA Y ORTEGA

Departamento de Economía y Estadística
Universidad de Navarra

En 1974 Gregory J. Chaitin publicaba un artículo con el que iniciaba una línea de investigación dirigida a establecer una nueva fundamentación teórica al concepto de aleatoriedad. La base de este nuevo enfoque es la intuición común de que los números —sucesiones de dígitos— son considerados como aleatorios cuando no es posible descubrir una ley o regularidad en su estructura. Es decir, cuando no es posible detectar un bloque de dígitos —un modelo o patrón— que se repite sistemáticamente.

Los números aleatorios son generados por lo que se ha dado en llamar experimentos aleatorios. El lanzamiento de una moneda es el paradigma de ese tipo de experimentos. Si al lanzar la moneda sale «cara» se le asigna el dígito 0, si sale «cruz» se le asigna el dígito 1. Repitiendo un número determinado de veces los lanzamientos de una moneda y registrando los resultados, se obtiene una sucesión de ceros y unos, en la que de acuerdo con esa descripción intuitiva de aleatoriedad no es posible descubrir ninguna regularidad en la estructura de esa sucesión. En principio, después de un dígito hay la misma probabilidad que el siguiente sea un cero o un uno. Se dice entonces que los dos eventos posibles 0 o 1 tienen la misma probabilidad.

Sostiene Chaitin que este modo de describir la aleatoriedad no deja de ser ambiguo, ya que una sucesión que presente una marcada regularidad en su estructura, podría también haber sido generado por el lanzamiento de una moneda. Con el fin de evitar esa ambigüedad, Chaitin propuso una nueva manera de introducir la aleatoriedad que sea coherente con la idea intuitiva de falta de regularidad en la sucesión de dígitos. Su intuición básica es que la aleatoriedad de una sucesión no debe establecerse en función de su origen —la forma en que ha sido generada— sino que debe ser introducida en dependencia exclusiva de su estructura numérica.

Chaitin llega a esta nueva aproximación al concepto de aleatoriedad desde los fundamentos de la Teoría de la Información, desarrollada prácticamente en la segunda mitad de este siglo. Como se sabe esta teoría se centra principalmente en el estudio de la estructura, contenido y transmisión de mensajes. Uno de los elementos característicos de esta teoría es su concepción económica. Hay

ahorrar información en el plano teórico, no puede seguir usándose tan descuidadamente cuando, como ocurre en el caso de los supuestos planteados por Chaitin y en general con todo tipo de supuestos que podríamos englobar bajo el título de «matemática con ordenador», el coste de la información es un dato decisivo al establecer las condiciones de observación.

Puede afirmarse que quizá Chaitin no llegue a ser consciente de la importancia de ese supuesto económico que el mismo enuncia. A lo largo de todo el posterior desarrollo de sus trabajos no lo vuelve a emplear de forma explícita. En ningún momento, por ejemplo, toma en consideración que un programa puede ser muy corto en instrucciones pero puede llevar mucho tiempo de ordenador.

Dejando de momento esas consideraciones, queremos centrarnos ahora en el concepto de aleatoriedad que introduce. El primer reparo que tenemos que hacer es que la aleatoriedad por su misma naturaleza implica dinamicidad, posibilidad de ocurrencia, mientras que el planteamiento de Chaitin, a pesar de sus prometedoras bases de partida, es radicalmente estático.

Pensamos que no es posible separar tan drásticamente las causas de sus efectos; no se puede pretender estudiar la estructura íntima de una sucesión de dígitos en radical separación con la causa que la genera, sería algo parecido a elaborar un sistema formal sin establecer sus axiomas.

La estructura de una sucesión de dígitos es algo que de algún modo refleja la naturaleza de la causa que la ha producido. Son como las huellas dejadas en la arena por algún extraño viviente o artefacto que camina sobre ella. El examen de esas huellas nos puede decir algo sobre la naturaleza de la causa que las produce. Aunque por supuesto no habría inconveniente en estudiar las huellas desde el estricto punto de vista de su estructura interna, es precisamente la estructura la que más referencia hace a la fuente que las genera. La aleatoriedad, incluso desde el enfoque de Chaitin, no puede reducirse a mera ausencia de regularidad, sino que hace necesaria referencia a la incertidumbre sobre cuál será la probabilidad de ocurrencia del siguiente dígito o suceso.

Incetidumbre e información son términos complementarios que no pueden separarse de la existencia de un observador, de una persona que tiene una capacidad de emitir juicios sobre el valor de la información y, que en este sentido, es capaz de establecer su propio marco o «ventana» de observación desde la cual acotar la total e inabarcable realidad.

Cuando Chaitin establece su nuevo enfoque del concepto de aleatoriedad a partir del de escasez de la información, está estableciendo, quizá sin tener mucha conciencia de ello, que el observador y sus personales juicios de valor de algún modo está presente en el mismo sistema formal que se está utilizando. En otras palabras, todo intento de construcción de un sistema formal de cálculo plantea el problema fundamental de la objetivación, lo cual implícitamente conlleva el de la subjetividad.

En este proceso de objetivación, axiomatizar es reducir la observación a un «hecho» que permita fundamentar consistentemente un proceso de formalización algorítmica. Para Chaitin la prueba de consistencia del sistema es que la

información contenida en el axioma sea algorítmicamente irreductible; en otras palabras, que sea aleatorio.

Los axiomas son los parámetros fundamentales para establecer las «ventanas» que constituyen el sistema formal que simplifica y permite observar el sistema real, y a través de las cuales se recibe la información de interés y se refleja toda la restante información no explícitamente contemplada. Cuando todo esto se olvida y se tiende a confundir la observación con el hecho, se plantean dificultades epistemológicas que desvirtúan la propia naturaleza del método axiomático.

Lo que en cada circunstancia se considera un «hecho» depende del «esquema de observación» que utiliza el observador. Por un elemental principio económico no interesa todo lo observable sino aquella parte o aspecto de la realidad que interesa al observador. La observación exige una economía de medios respecto a lo que es observable que obliga a «estabilizar» la realidad, someterla a una «ventana» o sistema formal que permita definir «estados».

En el caso del lanzamiento de una moneda, no interesa la totalidad de lo que realmente ocurre, sino aquella parte de la información potencialmente alcanzable que por determinadas circunstancias son de interés para el observador. Se crea una «ventana» de observación que, al reducir los posibles aspectos de la realidad, crea «estados» observables o «resultados». De este modo se logra que sólo sean observables los dos «estados» que interesan y que se designan como «cara» y «cruz».

El observador de acuerdo con sus intereses y con los costes implícitos impone restricciones que reducen la realidad: sólo considera unos determinados parámetros observables dentro de unos intervalos espacio temporales considerados como razonables.

Si sólo interesa saber si la moneda cae o no cae, y se asigna un dígito a cada uno de los resultados, el registro sistemático de la repetición del lanzamiento de la moneda daría una sucesión arbitrariamente larga de iteraciones de ese símbolo, lo cual permitiría decir que dentro de la «ventana» elegida la moneda siempre cae, o en el lenguaje de Salomonoff-Chaitin, que es posible crear un programa mínimo que genere sucesiones arbitrariamente largas de la misma naturaleza que la observada. Lo que puede interpretarse dentro del sistema formal que representa la «ventana» diciendo que hay una «ley» —regularidad— que gobierna el comportamiento del hecho. Si lo que interesa es conocer sobre cuál de los lados la moneda cae, entonces el análisis del registro la sucesión de repeticiones sólo nos permite decir que no sabemos absolutamente nada de cuál es la «ley» o regularidad que gobierna ese comportamiento.

Pensamos que hablar de aleatoriedad de un número o sucesión de dígitos es una extensión impropia del término, ya que la misma etimología de la palabra se refiere fundamentalmente a su causa u origen —el comportamiento incierto de los dados: «alea»—, con lo que la nueva ampliación del término que introduce Chaitin complica el debate sobre la naturaleza de la aleatoriedad.

Parece muy sugerente la conexión de la aleatoriedad con los fundamentos

que transmitir la máxima información con el mínimo coste, o, en otras palabras, parte del supuesto básico de que la información no es un bien libre que se pueda adquirir o transmitir sin coste.

No deja de ser significativo de este planteamiento que Chaitin, para introducir su concepto de aleatoriedad recurra a dos ejemplos muy interesantes desde el punto de vista de esos presupuestos epistemológicos: la transmisión a muy larga distancia de información contenida en las tablas trigonométricas, o la aportada por los resultados de la liga americana de fútbol. Mientras los datos correspondientes a la primera pueden ser transmitidos con gran ahorro de información mediante el recurso a breves instrucciones que facilitan su cálculo, los correspondientes a los segundos no pueden ser abreviados en manera alguna. Estos ejemplos le son de gran utilidad para introducir la intuición fundamental de que «la información contenida en una serie aleatoria no puede ser comprimida o abreviada en forma más compacta».

Para formalizar este planteamiento recurre Chaitin al supuesto de comunicación o envío de mensajes no entre personas, sino entre ordenadores, ya que estas máquinas no tiene posibilidad «de saber más que lo que reciben», de tal modo que las instrucciones que se les suministran deben ser completas y explícitas a fin de que puedan realizar paso a paso todo el programa que se les indica sin ninguna posibilidad de recurrir a intuiciones, inducciones, o cualquier tipo de juicios que sólo son propios de personas. Tal tipo de ordenación o programación de un número finito de instrucciones con la finalidad de alcanzar un resultado concreto es lo que se conoce como algoritmo.

Un algoritmo, del mismo modo que un conjunto de datos, tiene una determinada cantidad de información que puede ser medida. Para realizar esta medición se toma como unidad de información el «bit», que se define como la cantidad más pequeña de información necesaria para representar una alternativa entre dos posibilidades igualmente probables. Su representación típica es el par de dígitos (0, 1) ambos con igual probabilidad de ocurrencia.

Los ordenadores, debido a su estructura física, reducen toda la información a «bits» que físicamente se corresponden con las dos posibles alternativas de paso o no paso de corriente eléctrica por un determinado artefacto. Luego para comunicar con un ordenador es necesario traducir toda la información en códigos construidos a partir del sistema binario.

En este planteamiento todo conjunto de datos o algoritmo que utiliza un ordenador puede expresarse en función del número de «bits» que contienen.

Según Chaitin «una serie de dígitos es aleatoria si el algoritmo más pequeño necesario para especificárselo a un ordenador tiene casi el mismo número de «bits» que la serie». Esta definición fue también establecida en forma independiente por A. N. Kolmogoroff en 1965.

Recurre entonces Chaitin de nuevo a un concepto de Teoría de la Información introducido por Salomonoff que tiene el ambiguo nombre de «complejidad». Se entiende entonces que «la complejidad de una sucesión de dígitos es el número de «bits» que deben introducirse en un ordenador con el fin de obtener

la serie en cuestión». Es decir, la «complejidad» es igual al tamaño en «bits» del programa mínimo que genera esa sucesión.

Con este equipamiento de definiciones establece definitivamente Chaitin que «una sucesión aleatoria de dígitos es aquella cuya complejidad es aproximadamente igual a su tamaño en bits». En su opinión, la principal ventaja de esta nueva definición es que no sólo sirve para establecer la aleatoriedad sino también para medirla.

Desde este punto de vista, para establecer que una determinada sucesión de dígitos es aleatoria se deberá probar que no hay posibilidad de crear un programa de «complejidad» mucho menor que la de la misma serie.

Chaitin, reinterpretando al teorema de Godel sostiene que esa supuesta prueba de aleatoriedad nunca podrá llegar a establecerse, ya que para ello sería necesario la demostración de un teorema que podría tener el siguiente planteamiento: «encontrar una sucesión de dígitos binarios que tenga «complejidad» mayor que el número de «bits» que el programa de ordenador que la genera». La imposibilidad lógica de esta prueba no proviene de la implícita indefinición del número de «bits» del programa, sino del todavía más ambiguo número de «bits» correspondientes a la información que constituye la totalidad del sistema formal, que está constituido por los axiomas, alfabetos, sintaxis y reglas de decisión.

Subyacentes a todo programa hay una información, no totalmente formalizada, que es aportada por los axiomas y reglas de inferencia que determinan el comportamiento del sistema y permiten construir los algoritmos necesarios para realizar las comprobaciones de los teoremas propuestos.

En otras palabras, la información englobada en los axiomas es en sí misma aleatoria y puede ser empleada para probar la aleatoriedad de otros datos, pero esto último solamente en el caso en que su «complejidad» sea menor que la de la totalidad del sistema formal que engloba los axiomas. Como resulta que cualquier sistema formal es necesariamente finito, mientras que las sucesiones de dígitos pueden hacerse arbitrariamente grandes, resulta que siempre habrá números —sucesiones de dígitos— cuya aleatoriedad nunca podrá ser probada.

Ante tal situación, la conclusión que alcanza Chaitin es que todo sistema formal descansa sobre axiomas o asertos fundamentales cuya información implícita es irreductible en el mismo sentido que lo es la de un programa mínimo. Si un axioma pudiera ser expresado más compactamente, entonces el nuevo aserto más comprimido sería un nuevo axioma, mientras que el viejo axioma pasaría a ser un teorema derivado.

Al analizar el planteamiento de Chaitin es necesario destacar en primer lugar un hecho que juzgamos de la máxima importancia; por primera vez en el campo de las demostraciones lógicas se hace reconocimiento explícito del coste de la información. Es decir, que la observación y el cálculo llevan tiempo y que por tanto el observador no es neutral respecto de la información requerida. En este sentido puede decirse que en el terreno de la deducción matemática, el recurso al paso a infinito, que no es más que un procedimiento admisible para

de la teoría de la información. Pero para no descuidar el aspecto dinámico de esa teoría pensamos que es importante completar las aportaciones de Chaitin con una visión de medida de incertidumbre, como por ejemplo la entropía de Shannon (*vid.* Martínez-Echevarría, 1978). En tal caso un axioma es aleatorio cuando se corresponde con un máximo de incertidumbre sobre el comportamiento futuro. Es decir, cuando se hace estable y por tanto observable.

A nuestro entender la aportación de Chaitin pone de manifiesto aspectos muy importantes para entender el concepto de aleatoriedad, pero quizá podría completarse y mejorarse si se toma en cuenta explícitamente la naturaleza epistemológica del binomio observación-observador. En nuestra opinión el trabajo de Chaitin viene a poner de manifiesto que el concepto de aleatoriedad es relativo al nivel de observación establecido. Si se acepta nuestro enfoque es entonces posible introducir el concepto de aprendizaje, que como muy bien ha puesto de manifiesto Pérez López es decisivo para no incurrir en abstracciones incompletas.

No dar entrada a los procesos de aprendizaje es reducir todo el conocimiento a cálculo, lo que conlleva el grave inconveniente —puesto de manifiesto en los trabajos de Chaitin— de eliminar el aspecto dinámico del comportamiento. Si todo lo que no es algoritmizable es un axioma, entonces el futuro sólo puede ser entendido de esa manera, lo cual no deja de ser contradictorio con el planteamiento de Chaitin.

Con este nuevo enfoque se viene a establecer que la aleatoriedad expresa el límite de capacidad del sistema formal, en cuanto marco de observación establecido, para obtener más información del sistema real.

Bibliografía

- CHAITIN GREGORY, I. (1987): *Algorithmic information theory*. Cambridge University Press.
- (1987): «Information, randomness and incompleteness», *World scientific publications*.
- (1974): «Information-theoretic limitations of formal systems», *Journal of the association for computing machinery*, vol. 21, pp. 403-424, julio.
- (1975): *Randomness and mathematical proof*. *Scientific American*, vol. 232, pp. 47-52, mayo.
- MARTÍNEZ-ECHEVARRÍA Y ORTEGA, M. A. (1980): «La entropía como medida de la "bondad de predicción" en situaciones dinámicas», *Estadística Española*, núms. 84-85.
- PÉREZ LÓPEZ, J. A. (1989): *Elementos para una teoría de la acción humana*, IESB (w.p.).

Aleatoriedad y observación

Miguel Alfonso MARTÍNEZ-ECHEVARRÍA Y ORTEGA

Departamento de Economía y Estadística
Universidad de Navarra

En 1974 Gregory J. Chaitin publicaba un artículo con el que iniciaba una línea de investigación dirigida a establecer una nueva fundamentación teórica al concepto de aleatoriedad. La base de este nuevo enfoque es la intuición común de que los números —sucesiones de dígitos— son considerados como aleatorios cuando no es posible descubrir una ley o regularidad en su estructura. Es decir, cuando no es posible detectar un bloque de dígitos —un modelo o patrón— que se repite sistemáticamente.

Los números aleatorios son generados por lo que se ha dado en llamar experimentos aleatorios. El lanzamiento de una moneda es el paradigma de ese tipo de experimentos. Si al lanzar la moneda sale «cara» se le asigna el dígito 0, si sale «cruz» se le asigna el dígito 1. Repitiendo un número determinado de veces los lanzamientos de una moneda y registrando los resultados, se obtiene una sucesión de ceros y unos, en la que de acuerdo con esa descripción intuitiva de aleatoriedad no es posible descubrir ninguna regularidad en la estructura de esa sucesión. En principio, después de un dígito hay la misma probabilidad que el siguiente sea un cero o un uno. Se dice entonces que los dos eventos posibles 0 o 1 tienen la misma probabilidad.

Sostiene Chaitin que este modo de describir la aleatoriedad no deja de ser ambiguo, ya que una sucesión que presente una marcada regularidad en su estructura, podría también haber sido generado por el lanzamiento de una moneda. Con el fin de evitar esa ambigüedad, Chaitin propuso una nueva manera de introducir la aleatoriedad que sea coherente con la idea intuitiva de falta de regularidad en la sucesión de dígitos. Su intuición básica es que la aleatoriedad de una sucesión no debe establecerse en función de su origen —la forma en que ha sido generada— sino que debe ser introducida en dependencia exclusiva de su estructura numérica.

Chaitin llega a esta nueva aproximación al concepto de aleatoriedad desde los fundamentos de la Teoría de la Información, desarrollada prácticamente en la segunda mitad de este siglo. Como se sabe esta teoría se centra principalmente en el estudio de la estructura, contenido y transmisión de mensajes. Uno de los elementos característicos de esta teoría es su concepción económica. Hay

que transmitir la máxima información con el mínimo coste, o, en otras palabras, parte del supuesto básico de que la información no es un bien libre que se pueda adquirir o transmitir sin coste.

No deja de ser significativo de este planteamiento que Chaitin, para introducir su concepto de aleatoriedad recurra a dos ejemplos muy interesantes desde el punto de vista de esos presupuestos epistemológicos: la transmisión a muy larga distancia de información contenida en las tablas trigonométricas, o la aportada por los resultados de la liga americana de fútbol. Mientras los datos correspondientes a la primera pueden ser transmitidos con gran ahorro de información mediante el recurso a breves instrucciones que facilitan su cálculo, los correspondientes a los segundos no pueden ser abreviados en manera alguna. Estos ejemplos le son de gran utilidad para introducir la intuición fundamental de que «la información contenida en una serie aleatoria no puede ser comprimida o abreviada en forma más compacta».

Para formalizar este planteamiento recurre Chaitin al supuesto de comunicación o envío de mensajes no entre personas, sino entre ordenadores, ya que estas máquinas no tiene posibilidad «de saber más que lo que reciben», de tal modo que las instrucciones que se les suministran deben ser completas y explícitas a fin de que puedan realizar paso a paso todo el programa que se les indica sin ninguna posibilidad de recurrir a intuiciones, inducciones, o cualquier tipo de juicios que sólo son propios de personas. Tal tipo de ordenación o programación de un número finito de instrucciones con la finalidad de alcanzar un resultado concreto es lo que se conoce como algoritmo.

Un algoritmo, del mismo modo que un conjunto de datos, tiene una determinada cantidad de información que puede ser medida. Para realizar esta medición se toma como unidad de información el «bit», que se define como la cantidad más pequeña de información necesaria para representar una alternativa entre dos posibilidades igualmente probables. Su representación típica es el par de dígitos (0, 1) ambos con igual probabilidad de ocurrencia.

Los ordenadores, debido a su estructura física, reducen toda la información a «bits» que físicamente se corresponden con las dos posibles alternativas de paso o no paso de corriente eléctrica por un determinado artefacto. Luego para comunicar con un ordenador es necesario traducir toda la información en códigos contruidos a partir del sistema binario.

En este planteamiento todo conjunto de datos o algoritmo que utiliza un ordenador puede expresarse en función del número de «bits» que contienen.

Según Chaitin «una serie de dígitos es aleatoria si el algoritmo más pequeño necesario para especificárselo a un ordenador tiene casi el mismo número de «bits» que la serie». Esta definición fue también establecida en forma independiente por A. N. Kolmogoroff en 1965.

Recurre entonces Chaitin de nuevo a un concepto de Teoría de la Información introducido por Salomonoff que tiene el ambiguo nombre de «complejidad». Se entiende entonces que «la complejidad de una sucesión de dígitos es el número de «bits» que deben introducirse en un ordenador con el fin de obtener

la serie en cuestión». Es decir, la «complejidad» es igual al tamaño en «bits» del programa mínimo que genera esa sucesión.

Con este equipamiento de definiciones establece definitivamente Chaitin que «una sucesión aleatoria de dígitos es aquella cuya complejidad es aproximadamente igual a su tamaño en bits». En su opinión, la principal ventaja de esta nueva definición es que no sólo sirve para establecer la aleatoriedad sino también para medirla.

Desde este punto de vista, para establecer que una determinada sucesión de dígitos es aleatoria se deberá probar que no hay posibilidad de crear un programa de «complejidad» mucho menor que la de la misma serie.

Chaitin, reinterpretando al teorema de Godel sostiene que esa supuesta prueba de aleatoriedad nunca podrá llegar a establecerse, ya que para ello sería necesario la demostración de un teorema que podría tener el siguiente planteamiento: «encontrar una sucesión de dígitos binarios que tenga «complejidad» mayor que el número de «bits» que el programa de ordenador que la genera». La imposibilidad lógica de esta prueba no proviene de la implícita indefinición del número de «bits» del programa, sino del todavía más ambiguo número de «bits» correspondientes a la información que constituye la totalidad del sistema formal, que está constituido por los axiomas, alfabetos, sintaxis y reglas de decisión.

Subyacentes a todo programa hay una información, no totalmente formalizada, que es aportada por los axiomas y reglas de inferencia que determinan el comportamiento del sistema y permiten construir los algoritmos necesarios para realizar las comprobaciones de los teoremas propuestos.

En otras palabras, la información englobada en los axiomas es en sí misma aleatoria y puede ser empleada para probar la aleatoriedad de otros datos, pero esto último solamente en el caso en que su «complejidad» sea menor que la de la totalidad del sistema formal que engloba los axiomas. Como resulta que cualquier sistema formal es necesariamente finito, mientras que las sucesiones de dígitos pueden hacerse arbitrariamente grandes, resulta que siempre habrá números —sucesiones de dígitos— cuya aleatoriedad nunca podrá ser probada.

Ante tal situación, la conclusión que alcanza Chaitin es que todo sistema formal descansa sobre axiomas o asertos fundamentales cuya información implícita es irreductible en el mismo sentido que lo es la de un programa mínimo. Si un axioma pudiera ser expresado más compactamente, entonces el nuevo aserto más comprimido sería un nuevo axioma, mientras que el viejo axioma pasaría a ser un teorema derivado.

Al analizar el planteamiento de Chaitin es necesario destacar en primer lugar un hecho que juzgamos de la máxima importancia; por primera vez en el campo de las demostraciones lógicas se hace reconocimiento explícito del coste de la información. Es decir, que la observación y el cálculo llevan tiempo y que por tanto el observador no es neutral respecto de la información requerida. En este sentido puede decirse que en el terreno de la deducción matemática, el recurso al paso a infinito, que no es más que un procedimiento admisible para

ahorrar información en el plano teórico, no puede seguir usándose tan descuidadamente cuando, como ocurre en el caso de los supuestos planteados por Chaitin y en general con todo tipo de supuestos que podríamos englobar bajo el título de «matemática con ordenador», el coste de la información es un dato decisivo al establecer las condiciones de observación.

Puede afirmarse que quizá Chaitin no llegue a ser consciente de la importancia de ese supuesto económico que el mismo enuncia. A lo largo de todo el posterior desarrollo de sus trabajos no lo vuelve a emplear de forma explícita. En ningún momento, por ejemplo, toma en consideración que un programa puede ser muy corto en instrucciones pero puede llevar mucho tiempo de ordenador.

Dejando de momento esas consideraciones, queremos centrarnos ahora en el concepto de aleatoriedad que introduce. El primer reparo que tenemos que hacer es que la aleatoriedad por su misma naturaleza implica dinamicidad, posibilidad de ocurrencia, mientras que el planteamiento de Chaitin, a pesar de sus prometedoras bases de partida, es radicalmente estático.

Pensamos que no es posible separar tan drásticamente las causas de sus efectos; no se puede pretender estudiar la estructura íntima de una sucesión de dígitos en radical separación con la causa que la genera, sería algo parecido a elaborar un sistema formal sin establecer sus axiomas.

La estructura de una sucesión de dígitos es algo que de algún modo refleja la naturaleza de la causa que la ha producido. Son como las huellas dejadas en la arena por algún extraño viviente o artefacto que camina sobre ella. El examen de esas huellas nos puede decir algo sobre la naturaleza de la causa que las produce. Aunque por supuesto no habría inconveniente en estudiar las huellas desde el estricto punto de vista de su estructura interna, es precisamente la estructura la que más referencia hace a la fuente que las genera. La aleatoriedad, incluso desde el enfoque de Chaitin, no puede reducirse a mera ausencia de regularidad, sino que hace necesaria referencia a la incertidumbre sobre cuál será la probabilidad de ocurrencia del siguiente dígito o suceso.

Incertidumbre e información son términos complementarios que no pueden separarse de la existencia de un observador, de una persona que tiene una capacidad de emitir juicios sobre el valor de la información y, que en este sentido, es capaz de establecer su propio marco o «ventana» de observación desde la cual acotar la total e inabarcable realidad.

Cuando Chaitin establece su nuevo enfoque del concepto de aleatoriedad a partir del de escasez de la información, está estableciendo, quizá sin tener mucha conciencia de ello, que el observador y sus personales juicios de valor de algún modo está presente en el mismo sistema formal que se está utilizando. En otras palabras, todo intento de construcción de un sistema formal de cálculo plantea el problema fundamental de la objetivación, lo cual implícitamente conlleva el de la subjetividad.

En este proceso de objetivación, axiomatizar es reducir la observación a un «hecho» que permita fundamentar consistentemente un proceso de formalización algorítmica. Para Chaitin la prueba de consistencia del sistema es que la

información contenida en el axioma sea algorítmicamente irreductible; en otras palabras, que sea aleatorio.

Los axiomas son los parámetros fundamentales para establecer las «ventanas» que constituyen el sistema formal que simplifica y permite observar el sistema real, y a través de las cuales se recibe la información de interés y se refleja toda la restante información no explícitamente contemplada. Cuando todo esto se olvida y se tiende a confundir la observación con el hecho, se plantean dificultades epistemológicas que desvirtúan la propia naturaleza del método axiomático.

Lo que en cada circunstancia se considera un «hecho» depende del «esquema de observación» que utiliza el observador. Por un elemental principio económico no interesa todo lo observable sino aquella parte o aspecto de la realidad que interesa al observador. La observación exige una economía de medios respecto a lo que es observable que obliga a «estabilizar» la realidad, someterla a una «ventana» o sistema formal que permita definir «estados».

En el caso del lanzamiento de una moneda, no interesa la totalidad de lo que realmente ocurre, sino aquella parte de la información potencialmente alcanzable que por determinadas circunstancias son de interés para el observador. Se crea una «ventana» de observación que, al reducir los posibles aspectos de la realidad, crea «estados» observables o «resultados». De este modo se logra que sólo sean observables los dos «estados» que interesan y que se designan como «cara» y «cruz».

El observador de acuerdo con sus intereses y con los costes implícitos impone restricciones que reducen la realidad: sólo considera unos determinados parámetros observables dentro de unos intervalos espacio temporales considerados como razonables.

Si sólo interesa saber si la moneda cae o no cae, y se asigna un dígito a cada uno de los resultados, el registro sistemático de la repetición del lanzamiento de la moneda daría una sucesión arbitrariamente larga de iteraciones de ese símbolo, lo cual permitiría decir que dentro de la «ventana» elegida la moneda siempre cae, o en el lenguaje de Salomonoff-Chaitin, que es posible crear un programa mínimo que genere sucesiones arbitrariamente largas de la misma naturaleza que la observada. Lo que puede interpretarse dentro del sistema formal que representa la «ventana» diciendo que hay una «ley» —regularidad— que gobierna el comportamiento del hecho. Si lo que interesa es conocer sobre cuál de los lados la moneda cae, entonces el análisis del registro la sucesión de repeticiones sólo nos permite decir que no sabemos absolutamente nada de cuál es la «ley» o regularidad que gobierna ese comportamiento.

Pensamos que hablar de aleatoriedad de un número o sucesión de dígitos es una extensión impropia del término, ya que la misma etimología de la palabra se refiere fundamentalmente a su causa u origen —el comportamiento incierto de los dados: «alea»—, con lo que la nueva ampliación del término que introduce Chaitin complica el debate sobre la naturaleza de la aleatoriedad.

Parece muy sugerente la conexión de la aleatoriedad con los fundamentos

de la teoría de la información. Pero para no descuidar el aspecto dinámico de esa teoría pensamos que es importante completar las aportaciones de Chaitin con una visión de medida de incertidumbre, como por ejemplo la entropía de Shanon (*vid. Martínez-Echevarría, 1978*). En tal caso un axioma es aleatorio cuando se corresponde con un máximo de incertidumbre sobre el comportamiento futuro. Es decir, cuando se hace estable y por tanto observable.

A nuestro entender la aportación de Chaitin pone de manifiesto aspectos muy importantes para entender el concepto de aleatoriedad, pero quizá podría completarse y mejorarse si se toma en cuenta explícitamente la naturaleza epistemológica del binomio observación-observador. En nuestra opinión el trabajo de Chaitin viene a poner de manifiesto que el concepto de aleatoriedad es relativo al nivel de observación establecido. Si se acepta nuestro enfoque es entonces posible introducir el concepto de aprendizaje, que como muy bien ha puesto de manifiesto Pérez López es decisivo para no incurrir en abstracciones incompletas.

No dar entrada a los procesos de aprendizaje es reducir todo el conocimiento a cálculo, lo que conlleva el grave inconveniente —puesto de manifiesto en los trabajos de Chaitin— de eliminar el aspecto dinámico del comportamiento. Si todo lo que no es algoritmizable es un axioma, entonces el futuro sólo puede ser entendido de esa manera, lo cual no deja de ser contradictorio con el planteamiento de Chaitin.

Con este nuevo enfoque se viene a establecer que la aleatoriedad expresa el límite de capacidad del sistema formal, en cuanto marco de observación establecido, para obtener más información del sistema real.

Bibliografía

- CHAITIN GREGORY, J. (1987): *Algorithmic information theory*, Cambridge University Press.
 — (1987): «Information, randomness and incompleteness», *World scientific publications*.
 — (1974): «Information-theoretic limitations of formal systems», *Journal of the association for computing machinery*, vol. 21, pp. 403-424, julio.
 — (1975): *Randomness and mathematical proof* *Scientific American*, vol. 232, pp. 47-52, mayo.
 MARTÍNEZ-ECHEVARRÍA Y ORTEGA, M. A. (1980): «La entropía como medida de la "bondad de predicción" en situaciones dinámicas», *Estadística Española*, núms. 84-85.
 PÉREZ LÓPEZ, J. A. (1989): *Elementos para una teoría de la acción humana*, IESE (w.p.).